

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	17
Βιογραφικό συγγραφέων.....	19

Κεφάλαιο 1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ	17
1.1.1 Δυνάμεις	17
1.1.2 Αριθμός e	19
1.1.3 Λογάριθμοι	19
1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	20
1.2.1 Ορισμοί Βασικές Έννοιες	20
1.2.2 Πράξεις	22
1.2.3 Βασικές Συναρτήσεις.....	24
1.3 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	32
1.4 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	35
<i>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	39
<i>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	47

Κεφάλαιο 2: ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	54
2.2 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ	55
2.2.1 Υπολογισμός του απλού τόκου.....	55
2.2.1.1 Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη.....	55

2.2.1.2	Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες.....	56
2.2.1.3	Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες	56
2.2.1.4	Τελική αξία κεφαλαίου ή ύψος κεφαλαίου C_1	57
2.2.1.5	Μέσο επιτόκιο	57
2.2.3	Εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού του απλού τόκου.....	58
2.2.3.1	Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο του σταθερού διαιρέτη.....	58
2.3	ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ.....	58
2.3.1	Γραμμάτιο εις διαταγή και συναλλαγματική	58
2.3.2	Παρούσα και ονομαστική αξία γραμματίου.....	59
2.3.3	Προεξόφληση γραμματίων.....	59
2.4	ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ	61
2.4.1	Εισαγωγή.....	61
2.4.2	Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου με εποχή ισοδυναμίας την ημέρα υπολογισμού	62
2.4.3	Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου με εποχή ισοδυναμίας την κοινή λήξη	63
2.4.4	Μέση λήξη	64
2.5	ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ	64
2.5.1	Τελική αξία κεφαλαίου με ανατοκισμό	64
2.5.2	Παρούσα αξία με σύνθετη κεφαλαιοποίηση όταν ο χρόνος δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του χρόνου του επιτοκίου	65
2.5.3	Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια	70
2.5.3.1	Υπολογισμός ανάλογων επιτοκίων	70
2.5.3.2	Υπολογισμός ισοδύναμων επιτοκίων	71
2.5.4	Μέσο επιτόκιο στον ανατοκισμό.....	71
2.5.5	Ισοδυναμία στο σύνθετο τόκο	71
2.6	ΡΑΝΤΕΣ.....	72
2.6.1	Εισαγωγή.....	72
2.6.2	Μοναδιαίες ράντες.....	73
2.6.2.1	Παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης μοναδιαίας ράντας.....	73
2.6.2.2	Παρούσα αξία προκαταβλητέας μοναδιαίας ράντας	74
2.6.2.3	Τελική αξία ληξιπρόθεσμης μοναδιαίας ράντας	75

2.6.2.4	Τελική αξία προκαταβλητέας μοναδιαίας ράντας	76
2.6.3	Μη μοναδιαίες ράντες.....	76
2.6.3.1	Παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης, ετήσιας, πρόσκαιρης, άμεσης ράντας	76
2.6.3.2	Παρούσα αξία προκαταβλητέας, ετήσιας, πρόσκαιρης, άμεσης ράντας	76
2.6.3.3	Τελική αξία ληξιπρόθεσμης, ετήσιας, πρόσκαιρης, άμεσης ράντας	77
2.6.3.4	Τελική αξία προκαταβλητέας, ετήσιας, πρόσκαιρης, άμεσης ράντας	77
2.6.3.5	Παρούσα αξία διηνεκούς ληξιπρόθεσμης, άμεσης, ετήσιας ράντας	77
2.6.3.6	Παρούσα αξία διηνεκούς προκαταβλητέας, άμεσης, ετήσιας ράντας	77
2.6.3.7	Παρούσα αξία μέλλουσας ράντας.....	77
2.6.4	Κλασματική ράντα	77
2.6.5	Ράντα αριθμητικής προόδου λ	78
2.6.6	Ράντα γεωμετρικής προόδου λ.....	80
2.7	ΕΝΙΑΙΑ ΔΑΝΕΙΑ	81
2.7.1	Εισαγωγή	81
2.7.2	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ	82
2.7.2.1	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με εφάπαξ εισφορά όταν καταβάλλονται οι τόκοι.....	82
2.7.2.2	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με εφάπαξ εισφορά όταν δεν καταβάλλονται οι τόκοι	82
2.7.2.3	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με εξοφλητικό απόθεμα	82
2.7.3	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικά.....	83
2.7.3.1	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με το σύστημα του σταθερού χρεολυσίου.....	83
2.7.3.2	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με το σύστημα του προοδευτικού χρεολυσίου	84
2.7.3.3	Ενιαία δάνεια εξοφλητέα με το σύστημα του μεταβλητού τοκοχρεολυσίου.....	85
	ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	86
	ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	102

Κεφάλαιο 3: ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	111
3.2	ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0	113
3.2.1	Πλευρικά όρια	116
3.2.2	Όρια που υπολογίζονται με τους κανόνες των ορίων	119
3.2.3	Όρια της μορφής $\frac{0}{0}$	120
3.3	ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0	123
3.4	ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ	130
3.4.1	Εισαγωγή	130
3.4.2	Ασύμπτωτες	134
3.4.3	Τεχνικές υπολογισμού ορίων στο άπειρο	135
3.5	ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	141
	ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	146
	ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	149

Κεφάλαιο 4: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ – ΠΛΕΥΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ	155
4.2	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	159
4.3	ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ	162
4.4	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ	167
4.5	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	171
4.6	ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	172
4.7	ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ	177
	ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ	187
	ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	189

Κεφάλαιο 5: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

	ΓΕΝΙΚΑ	197
	ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	222

Κεφάλαιο 6: ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	245
6.2	ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΠΡΟΚΕΙΜΕΝΟΥ ΝΑ ΠΡΟΚΥΨΕΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ.....	249
6.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΑΠΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.....	253
6.4	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	254
6.5	ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.....	257
6.6	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	258
6.7	ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	260
6.8	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + b}{cx + d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{\alpha x + b}{cx + d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$	261
6.9	ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.....	263
6.10	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΗΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.....	266
6.11	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ EULER.....	270
6.12	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ sinx ΚΑΙ cosx, ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	273
6.13	ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	274
	ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	279
	ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	296

Κεφάλαιο 7: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7.1	ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	301
	7.1.1 Εισαγωγή.....	301
	7.1.2 Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων	303
	7.1.3 Διαφορικές εξισώσεις και οικογένειες Καμπυλών	304
	7.1.4 Περιβάλλουσα οικογένειας Καμπυλών.....	308
7.2	ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ (Απλής μορφής).....	311

7.2.1	Εισαγωγή	311
7.2.2	Διαφορικές εξισώσεις με χαριζόμενες μεταβλητές.....	312
7.2.3	Ομογενείς Δ.Ε	318
7.2.4	Δ.Ε Αναγόμενες σε ομογενείς.....	323
7.2.5	Γραμμικές Δ.Ε	326
7.2.6	Δ.Ε του Bernoulli.....	332
7.2.7	Δ.Ε του Ricatti	334
7.2.8	Πλήρεις Διαφορικές εξισώσεις	336
7.2.9	Ε.Δ.Ε. 1ης τάξης ανώτερου βαθμού.....	341
7.2.10	Δ.Ε Clairaut.....	342
7.2.11	Δ.Ε του Lagrange.....	344
7.2.12	Ιδιάζουσες λύσεις Δ.Ε	346
7.2.13	Επίλυση Δ.Ε με μετασχηματισμούς	348
	<i>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	353
	<i>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	369

Κεφάλαιο 8: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

8.1	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ.....	373
8.2	ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.....	379
8.3	ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ	382
8.3.1	Μερικές Παράγωγοι	382
8.3.2	Γεωμετρική Ερμηνεία.....	386
8.3.3	Προσαυξήσεις και Διαφορικά	388
8.3.4	Παράγωγοι και διαφορικά συνθέτων συναρτήσεων.....	392
8.3.5	Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων.....	397
8.3.6	Μετασχηματισμοί.....	408
8.4	ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	410
8.5	ΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (GRADIENT).....	416
8.6	ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	419
8.7	ΑΚΡΟΤΑΤΑ.....	422
	<i>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	427
	<i>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	432

Κεφάλαιο 9: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

9.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ (Matrix).....	441
9.2 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	442
9.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	446
9.4 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ.....	452
9.5 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ.....	463
9.6 ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	467
9.7 ΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΑ.....	472
9.7.1 Εύρεση τάξεως πίνακα.....	473
9.8 ΙΧΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ.....	477
9.9 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	479
9.9.1 Ορισμός.....	479
9.9.2 Ύπαρξη λύσεων.....	480
9.9.3 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss.....	482
9.9.4 Μέθοδος αντίστροφου πίνακα.....	483
9.9.5 Επίλυση συστήματος με ορίζουσες.....	484
9.10 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ.....	487
<i>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	490
<i>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</i>	499

Κεφάλαιο 10: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑΣ

10.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	503
10.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....	504
10.2.1 Πείραμα τύχης.....	504
10.2.2 Σχέσεις μεταξύ συνόλων.....	505
10.2.3 Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης.....	509
10.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.....	513
10.3.1 Αξιώματα πιθανοτήτων.....	513
10.3.2 Εφαρμογές.....	514
10.3.3 Δεσμευμένη πιθανότητα.....	517
10.3.4 Ανεξάρτητα, εξαρτημένα ενδεχόμενα.....	518
10.3.5 Ολική πιθανότητα και θεώρημα του Bayes.....	521
10.3.6 Εφαρμογές.....	522

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	524
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	556

Κεφάλαιο 11: ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

11.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	561
11.2 Λήψη αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας	563
11.2.1 Βασικές έννοιες.....	563
11.2.2 Κριτήρια Απόφασης	564
11.2.3 Ανάλυση ευαισθησίας.....	572
11.2.4 Παράδειγμα	573
11.3 Δένδρα αποφάσεων	578
11.3.1 Κατασκευή Δένδρου.....	578
11.3.2 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας Κανόνας Bayes.....	585
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	587
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	600

Κεφάλαιο 12: ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

12.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	603
12.1.1 Βασικές έννοιες.....	603
12.2 Στοχαστική Διαδικασία Poisson.....	604
12.3 Τυχαίος Περίπατος	604
12.4 Μαρκοβιανές Διαδικασίες.....	605
12.5 Εξισώσεις Charman-Kolmogorov	609
12.6 Κατάταξη Στοχαστικών Διαδικασιών	611
12.7 Στασιμότητα.....	612
12.8 Μαρκοβιανές Διαδικασίες συνεχούς χρόνου	614
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	617
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	624
ΠΙΝΑΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	625
ΠΙΝΑΚΕΣ	641
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	733

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός του βιβλίου είναι η παρουσίαση με τρόπο απλό και κατανοητό του μεγαλύτερου μέρους της ύλης μαθηματικών που διδάσκεται σε ΑΕΙ Διοικητικών και Οικονομικών σχολών. Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές οικονομικών σχολών καθώς και φοιτητών θετικών επιστημών. Ακόμα μπορεί να φανεί χρήσιμο και σε μεταπτυχιακούς φοιτητές οικονομικών μεταπτυχιακών προγραμμάτων αλλά και σε στελέχη επιχειρήσεων.

Έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές γι' αυτό παρά το ότι υπάρχει σε αρκετό βαθμό αυστηρή θεωρητική τεκμηρίωση, έχουν παραληφθεί δύσκολες αποδείξεις θεωρημάτων. Προκειμένου ο αναγνώστης να κατανοήσει καλύτερα τις διδασκόμενες έννοιες σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει μεγάλο πλήθος λυμένων ασκήσεων.

Η δομή, η ύλη και ο τρόπος παρουσίασης είναι αποτέλεσμα της μακρόχρονης εμπειρίας των συγγραφέων στη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στο ΑΕΙ Πειραιά Τ.Τ.

Την σύνταξη των κεφαλαίων επιμελήθηκαν οι συγγραφείς ως εξής: το έβδομο και όγδοο ο Λ. Βρυζίδης, το πρώτο και το δεύτερο η Ε. Κοσσιέρη ενώ τα υπόλοιπα ο Μ. Χαλικιάς. Κατά τη συγγραφή πολύ σημαντική ήταν η βοήθεια της συναδέλφου Υ.Δ του πανεπιστημίου Cambridge Ελένης Χαραλάμπους. Οι παρατηρήσεις της ήταν ουσιώδεις και εντόπισε σημαντικό αριθμό παραλήψεων.

Θα ήθελα να αναφέρω ότι οποιαδήποτε παρατήρηση εκ μέρους του αναγνώστη με σκοπό τη βελτίωση ή τη διόρθωση της ύλης, θα είναι ευπρόσδεκτη και θα ληφθεί υπόψη σε μελλοντική επανέκδοση.

Μ. Χαλικιάς

Λ. Βρυζίδης

Ε. Κοσσιέρη